OSZACOWANIA MOMENTÓW WEKTORÓW LOSOWYCH

AUTOREFERAT ROZPRAWY DOKTORSKIEJ

MARTA STRZELECKA

Moja rozprawa poświęcona jest oszacowaniom norm pewnych naturalnych klas wektorów losowych w $\mathbb{R}^n$. Najciekawsze są oszacowania niezależące od wymiaru, które mogą być uogólnione na przypadek przestrzeni nieskończenie wymiarowych. Nie mniej jednak oszacowania zależące od wymiaru lepiej niż te, które można otrzymać trywialnie, są również ważne i dają nam lepsze zrozumienie zachowania wektorów losowych z badanej klasy. Spośród takich nieasymptotycznych oszacowań szczególnie ciekawe są te, w których występują tylko stałe rzędu logarytmicznego z wymiaru.

Opiszemy teraz trzy typy oszacowań, którymi zajmuję się w swojej rozprawie doktorskiej.

1. Porównywanie słabych i silnych momentów

W geometrii wypukłej często rozpatruje się klasę wektorów log-wklęsłych. Jedną z jej podstawowych własności jest nierówność Paourisa z [15], która w wersji pochodzącej z [1] orzeka, że dla dowolnego wektora log-wklęsłego X w $\mathbb{R}^n$ zachodzi

$$(\mathbb{E}\|X\|_2^p)^{1/p} \leq C_1 \Big((\mathbb{E}\|X\|_2^2)^{1/2} + \sigma_X(p) \Big) \qquad \text{for } p \geq 1, \tag{1.1}$$

gdzie

$$\sigma_X(p) := \sup_{\|t\|_2 \leq 1} \left(\mathbb{E}\Big| \sum_{i=1}^n t_i X_i \Big|^p \right)^{1/p}$$

jest euklidesowym słabym p-tym momentem wektora X. Z kolei wielkość $(\mathbb{E}\|X\|_2^p)^{1/p}$ nazywamy p-tym silnym momentem X (względem normy euklidesowej). Ponieważ zaś oszacowanie odwrotne do (1.1) jest oczywiście również spełnione (dla dowolnego wektora losowego X), to nierówność Paourisa orzeka tak naprawdę, że słabe i silne momenty normy euklidesowej wektora log-wklęsłego są porównywalne.

Można pytać, czy nierówność (1.1) uogólnia się na normy nieeuklidesowe. W [8] Latała postawił następującą hipotezę.

Hipoteza 1.1. Istnieje globalna stała C, taka że dla dowolnego wektora losowego X o wartościach w skończenie wymiarowej przestrzeni unormowanej $(F, \|\ \|)$ zachodzi

$$(\mathbb{E}\|X\|^p)^{1/p} \leq C\Big(\mathbb{E}\|X\| + \sup_{\varphi \in F^*, \|\varphi\|_* \leq 1} (\mathbb{E}|\varphi(X)|^p)^{1/p} \Big) \qquad \text{dla } p \geq 1. \tag{1.2}$$

Odpowiedź twierdząca znana jest dziś tylko w szczególnych przypadkach. Dlatego nawet częściowe wyniki związane z tą hipotezą byłyby interesujące i pogłębiłyby nasze zrozumienie wektorów log-wklęsłych.

Ciekawy jest również inny problem: znaleźć słabsze niż log-wklęsłość założenie, które implikowałoby (1.2), choćby w pewnych szczególnych przypadkach (na przykład tylko dla wektorów o niezależnych współrzędnych). Latała i Tkocz wykazali w [12], że w przypadku wektorów o niezależnych współrzędnych hipoteza (1.2) zachodzi również przy założeniu słabszego niż log-wklęsłość warunku. Tym słabszym warunkiem jest regularność wzrostu momentów współrzędnych wektora X. Jednakże w przypadku wektorów o zależnych współrzędnych regularny wzrost momentów wszystkich zmiennych postaci $\langle t, X\rangle$ (dla $t \in \mathbb{R}^n$) nie pociąga za sobą (1.2) nawet dla normy euklidesowej.

1.1. **Porównywanie momentów norm ℓ_r.** Pierwszym głównym wynikiem rozprawy jest analog nierówności Paourisa dla norm ℓ_r i dowolnych wektorów log-wklęsłych. Stała w otrzymanym oszacowaniu zależy liniowo od r. Twierdzenie to pochodzi ze wspólnej pracy z Rafałem Latałą [10]. Można je łatwo uogólnić na przypadek przestrzeni unormowanych, dla których istnieje izometryczne włożenie w ℓ_r.

Twierdzenie 1.2. *Niech X będzie wektorem log-wklęsłym o wartościach w przestrzeni unormowanej $(F, \|\ \|)$, która wkłada się izometryczne w ℓ_r dla pewnego $r \in [1,\infty)$. Wtedy dla każdego $p \geq 1$ zachodzi*

$$(\mathbb{E}\|X\|^p)^{1/p} \leq Cr\Big(\mathbb{E}\|X\| + \sup_{\varphi\in F^*, \|\varphi\|_*\leq 1} (\mathbb{E}|\varphi(X)|^p)^{1/p}\Big).$$

Z powyższego twierdzenia wynika następujące oszacowanie na ogony $\|X\|$.

Wniosek 1.3. *Niech X i F będą jak wyżej. Wówczas*

$$\mathbb{P}(\|X\| \geq 2eCrt\mathbb{E}\|X\|) \leq \exp\left(-\sigma^{-1}_{\|\cdot\|,X}(t\mathbb{E}\|X\|)\right) \qquad \textit{dla } t \geq 1.$$

Za C można wziąć stałą z Twierdzenia 1.2.

Aby wykazać Twierdzenie 1.2, wykazujemy następującą obciętą wersję nierówności z tego twierdzenia w przypadku przestrzeni ℓ_r.

Twierdzenie 1.4. *Załóżmy, że $r \in [1,\infty)$ oraz że X jest n-wymiarowym wektorem log-wklęsłym. Niech*

$$d_i := (\mathbb{E}X_i^2)^{1/2}, \quad d := \left(\sum_{i=1}^n d_i^r\right)^{1/r}. \tag{1.3}$$

Wtedy dla wszystkich $p \geq r$ zachodzi

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n |X_i|^r \mathbf{1}_{\{|X_i|\geq td_i\}}\right)^{p/r} \leq (C_2 r\sigma_{r,X}(p))^p \quad \textit{for } t \geq C_3 r\log\left(\frac{d}{\sigma_{r,X}(p)}\right), \tag{1.4}$$

gdzie

$$\sigma_{r,X}(p) := \sup_{\|t\|_{r'}\leq 1}\left(\mathbb{E}\Big|\sum_{i=1}^n t_iX_i\Big|^p\right)^{1/p}.$$

Uwaga 1.5. Każda skończenie wymiarowa przestrzeń unormowana wkłada się izometrycznie w ℓ_∞, więc aby wykazać Hipotezę 1.1, wystarczy wykazać Twierdzenie 1.2 (ze stałą absolutną w miejscu Cr) dla $r = \infty$. Wiadomo, że takie oszacowanie zachodzi dla izotropowych wektorów log-wklęsłych. Nie mniej jednak liniowy obraz wektora izotropowego nie musi być izotropowy, więc aby wykazać hipotezę należy rozpatrywać wektory izotropowe i dowolną normę lub wektory (log-wklęsłe) o dowolnej macierzy kowariancji i normę ℓ_∞.

Uwaga 1.6. Unormowana przestrzeń n-wymiarowa wkłada się izometrycznie w ℓ_∞^N, gdzie $N \sim e^n$. Co więcej, w $\mathbb{R}^N$ zachodzi podwójna nierówność $e^{-1}\|\cdot\|_{\log N} \leq \|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_{\log N}$. Wobec tego Twierdzenie 1.2 pociąga za sobą (1.2) ze stałą $C \sim \log N \sim n$. Co więcej, gdyby twierdzenie 1.2 zachodziło ze stałą Cr^γ zamiast z Cr, to (1.2) byłaby spełniona ze stałą $C \sim n^\gamma$, czego nie wiadomo dla żadnego $\gamma < \frac{1}{2}$.

1.2. **Porównywanie momentów w przypadku niezależnym.** Omówimy teraz wyniki otrzymane w kolejnej wspólnej pracy z Rafałem Latałą [11]. W tym celu spójrzmy na porównywanie momentów w nieco inny sposób niż do tej pory. Zamiast rozpatrywać momenty norm wektora losowego X, będziemy badać momenty zmiennej losowej $\sup_{t\in T}\left|\sum_{i=1}^n t_iX_i\right|$ – jeśli T jest kulą jednostkową w normie dualnej do $\|\cdot\|$, to ta zmienna losowa jest równa $\|X\|$. Takie podejście jest wygodne w dowodzie drugiego głównego wyniku rozprawy doktorskiej, który uogólnia wspomniane wcześniej twierdzenie z [12] dla wektorów o niezależnych współrzędnych.

Twierdzenie 1.7. *Niech $X_1,\ldots,X_n$ będą takimi niezależnymi scentrowanymi wektorami losowymi, że*

$$\|X_i\|_{2p} \leq \alpha\|X_i\|_p \qquad \text{dla wszystkich } p \geq 2 \text{ oraz } i = 1,\ldots,n, \tag{1.5}$$

gdzie α jest skończoną stałą dodatnią. Wówczas dla wszystkich parametrów $p \geq 1$ i niepustych zbiorów $T \subset \mathbb{R}^n$ zachodzi

$$\left(\mathbb{E}\sup_{t\in T}\Big|\sum_{i=1}^n t_iX_i\Big|^p\right)^{1/p} \leq C(\alpha)\left[\mathbb{E}\sup_{t\in T}\Big|\sum_{i=1}^n t_iX_i\Big| + \sup_{t\in T}\left(\mathbb{E}\Big|\sum_{i=1}^n t_iX_i\Big|^p\right)^{1/p}\right], \tag{1.6}$$

gdzie $C(\alpha)$ zależy jedynie od α.

Okazuje się, że w przypadku wektorów o niezależnych współrzędnych o jednakowym rozkładzie Twierdzenie 1.7 odwraca się (patrz poniższe twierdzenie). Dlatego założenie (1.5) w Twierdzeniu 1.7 nie może być osłabione.

Twierdzenie 1.8. *Niech $X_1, X_2,\ldots$ będą zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie. Załóżmy, że istnieje taka stała L, że dla każdego $p \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ i niepustego $T \subset \mathbb{R}^n$ zachodzi*

$$\left(\mathbb{E}\sup_{t\in T}\Big|\sum_{i=1}^n t_iX_i\Big|^p\right)^{1/p} \leq L\left[\mathbb{E}\sup_{t\in T}\Big|\sum_{i=1}^n t_iX_i\Big| + \sup_{t\in T}\left(\mathbb{E}\Big|\sum_{i=1}^n t_iX_i\Big|^p\right)^{1/p}\right]. \tag{1.7}$$

Wówczas

$$\|X_1\|_{2p} \leq \alpha(L)\|X_1\|_p \qquad \text{dla wszystkich } p \geq 2, \tag{1.8}$$

gdzie $\alpha(L)$ zależy jedynie od $L \geq 1$.

Z dowodu Twierdzenia 1.8 wynika, że wystarczy zakładać (1.7) jedynie dla $T = \{\pm e_j : j \in \{1,\ldots,n\}\}$ (tutaj $\{e_1,\ldots,e_n\}$ to kanoniczna baza $\mathbb{R}^n$).

Porównywanie słabych i silnych momentów (1.6) pociąga również następujące oszacowanie ogonów zmiennej losowej $\sup_{t\in T}|\sum_{i=1}^n t_iX_i|$.

Wniosek 1.9. *Załóżmy, że $X_1, X_2, \ldots$ spełniają założenia Twierdzenia 1.7. Wtedy dla wszystkich $u \geq 0$ i niepustych zbiorów T w $\mathbb{R}^n$ zachodzi*

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{t\in T}\Big|\sum_{i=1}^n t_i X_i\Big| \geq C_1(\alpha)\Big[u + \mathbb{E}\sup_{t\in T}\Big|\sum_{i=1}^n t_i X_i\Big|\Big]\Big) \leq C_2(\alpha)\sup_{t\in T}\mathbb{P}\Big(\Big|\sum_{i=1}^n t_i X_i\Big| \geq u\Big), \tag{1.9}$$

gdzie stałe $C_1(\alpha)$ i $C_2(\alpha)$ zależą jedynie od α z warunku (1.5).

Kolejną konsekwencją Twierdzenia 1.8 jest następująca nierówność typu Chinczyna-Kahana.

Wniosek 1.10. *Załóżmy, że X_i, $1 \leq i \leq n$ spełniają warunki Twierdzenia 1.7. Wtedy dla każdych $p \geq q \geq 2$ i niepustego zbioru T w $\mathbb{R}^n$ zachodzi*

$$\Big(\mathbb{E}\sup_{t\in T}\Big|\sum_{i=1}^n t_i X_i\Big|^p\Big)^{1/p} \leq C(\alpha)\Big(\frac{p}{q}\Big)^{\max\{1/2,\log_2\alpha\}}\Big(\mathbb{E}\sup_{t\in T}\Big|\sum_{i=1}^n t_i X_i\Big|^q\Big)^{1/q}$$

gdzie stała $C(\alpha)$ zależy tylko od α w warunku (1.5). *Ponadto wykładnik* $\max\{1/2, \log_2\alpha\}$ *jest optymalny.*

2. Wypukła nierówność splotu infimum

Niech X będzie wektorem losowym o wartościach w $\mathbb{R}^n$, a $\varphi : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ – funkcją mierzalną. Powiemy, że para (X, φ) spełnia *nierówność splotu infimum* (w skrócie ICI, jak *infimum convolution inequality*), jeśli dla każdej ograniczonej funkcji mierzalnej $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zachodzi

$$\mathbb{E}\, e^{f\Box\varphi(X)}\, \mathbb{E}\, e^{-f(X)} \leq 1, \tag{2.1}$$

gdzie $f\Box\varphi$ oznacza splot infimum funkcji f i φ zadany wzorem $f\Box\varphi(x) = \inf\{f(y) + \varphi(x-y) : y \in \mathbb{R}^n\}$ dla $x \in \mathbb{R}^n$. Funkcję φ nazywamy *funkcją kosztu*, a funkcję f – *funkcją testową*. Podobnie powiemy, że para (X, φ) spełnia *wypukłą nierówność splotu infimum*, jeśli (2.1) zachodzi dla każdej wypukłej i ograniczonej z dołu funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Opublikowane niedawno prace [5] i [4] pozwalają spojrzeć na nierówności ICI z nowej perspektywy. W [5] Gozlan, Roberto, Samson i Tetali wprowadzają słabe nierówności transportowe i podają ich dualne sformułowania. Owe dualne sformułowania to właśnie wypukłe nierówności splotu infimum. W [4] Gozlan, Roberto, Samson, Shu i Tetali wnikliwie badają nierówności słabego kosztu transportowego na prostej, otrzymując ich charakteryzację dla dowolnej wypukłej funkcji kosztu, która jest dodatkowo kwadratowa wokół zera. Wynik ten daje nam narzędzie do badania wypukłych nierówności ICI. Z kolei Feldheim, Marsiglietti i Nayar w [3] podają warunki równoważne wypukłej ICI na prostej z funkcją kwadratowo-liniową, co pozwala bardzo dokładnie zrozumieć wypukłe nierówności ICI z taką właśnie funkcji kosztu.

Wyniki opisane w rozdziale rozprawy doktorskiej poświęcony wypukłemu splotowi infimum pochodzą ze wspólnej pracy z Michałem Strzeleckim i Tomaszem Tkoczem [19]. Używając wspomnianych nowych narzędzi z [4], wykazujemy, że miary produktowe o symetrycznych rozkładach brzegowych, których ogony są log-wklęsłe, spełniają optymalną wypukłą ICI. Uzupełnia to wcześniejszy wynik Latały i Wojtaszczyka dla produktów miar log-wklęsłych. Nasze twierdzenie pociąga za sobą porównywanie słabych i silnych momentów. Podajemy również przykład świadczący o tym, że założenia log-wklęsłości ogonów nie można znacząco osłabić.

Wyjaśnijmy, czym jest *optymalna* wypukła ICI. Dla wektora losowego o wartościach w $\mathbb{R}^n$ definiujemy funkcję

$$\Lambda_X^*(x) := \mathcal{L}\Lambda_X(x) := \sup_{y\in\mathbb{R}^n}\{\langle x, y\rangle - \ln \mathbb{E}\, e^{\langle y,X\rangle}\},$$

czyli transformatę Legendre'a funkcji generującej momenty:

$$\Lambda_X(x) := \ln \mathbb{E}\, e^{\langle x,X\rangle}, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Jeśli wektor losowy X jest symetryczny i para (X, φ) spełnia wypukłą ICI, to $\varphi(x) \leq \Lambda_X^*(x)$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^n$. Innymi słowy Λ_X^* jest najmniejszą (dlatego optymalną) funkcją kosztu, z jaką zachodzić może wypukła ICI. Powiemy, że X spełnia (wypukłą) IC(β), jeśli para $(X, \Lambda_X^*(\cdot/\beta))$ spełnia (wypukłą) ICI.

Możemy sformułować teraz kolejny główny wynik rozprawy.

Twierdzenie 2.1. *Istnieje stała globalna $\beta \leq 1680e$, dla której każda symetryczna zmienna losowa o log-wypukłych ogonach spełnia wypukłą IC(β).*

Wypukła nierówność splotu infimum tensoryzuje się, wobec czego poprzednie twierdzenie implikuje:

Wniosek 2.2. *Niech X będzie symetrycznym wektorem losowym o wartościach w $\mathbb{R}^n$ i niezależnych współrzędnych o log-wklęsłych ogonach. Wówczas X spełnia wypukłą IC(β) ze stałą absolutną $\beta \leq 1680e$.*

Podkreślmy, że klasa rozkładów z Twierdzenia 2.1 jest większa niż klasa jednowymiarowych symetrycznych rozkładów log-wklęsłych rozpatrywana przez Latałę i Wojtaszczyka w [14]. Zawiera ona między innymi miary, które nie mają spójnego nośnika, na przykład symetryczny rozkład Bernoulliego.

Wiadomo, że zmienne losowe o log-wklęsłych ogonach są 1-regularne. Jednakże założenie log-wklęsłości ogonów w Twierdzeniu 2.1 nie może być zastąpione słabszym założeniem regularności momentów. Założenie Twierdzenia 2.1 nie jest więc dalekie od warunku koniecznego, przy którym zachodzi wypukła ICI na prostej (jako że zmienne o regularnym wzroście momentów są blisko zmiennych o log-wklęsłych ogonach w tym sensie, że te pierwsze szacują się obustronnie, z dokładnością do stałych, przez te drugie; patrz nierówność (4.6) w [12]).

Kolejnym wnioskiem z Twierdzenia 2.1 jest porównywanie słabych i silnych momentów ze stałą 1 przy silnym pierwszym momencie.

Wniosek 2.3. *Niech S będzie wektorem symetrycznym o wartościach w $\mathbb{R}^n$ i o niezależnych współrzędnych o log-wklęsłych ogonach. Wówczas dla każdej normy $\|\cdot\|$ na $\mathbb{R}^n$ i dla każdego $p \geq 2$ zachodzi*

$$\left(\mathbb{E}\,\|X\|^p\right)^{1/p} \leq \mathbb{E}\,\|X\| + D\sigma_{\|\cdot\|,X}(p), \tag{2.2}$$

gdzie D jest stałą globalną (można wziąć $D = 6720\sqrt{2}e^2 < 70223$).

3. Oszacowania norm macierzy log-wklęsłych

Specjalnym rodzajem norm są normy operatorowe macierzy (wektor (mn)-wymiarowy traktujemy jak macierz $m \times n$). W części rozprawy (powstałej na podstawie pracy w przygotowaniu [18] mojego autorstwa) poświęconej macierzom losowym zajmujemy się oszacowaniem średniej normy operatorowej macierzy losowych z ℓ_p^n do ℓ_q^m. Większość dotychczasowych wyników szacujących normy operatorowe dotyczyła tylko normy operatorowej z ℓ_2^n do ℓ_2^m. Co więcej, we wszystkich wcześniejszych oszacowaniach zakładać należało niezależność wyrazów macierzy. Nasze założenia są istotnie słabsze. Zanim przejdziemy do przedstawienia wyników z rozprawy dotyczących norm macierzy losowych, przedstawmy pokrótce stan obecnej wiedzy dotyczący tej materii.

Klasycznym wynikiem opisującym zachowanie spektrum macierzy losowych jest twierdzenie Wignera (tak zwane *Semicircle Law*), które orzeka, że słabą granicą (przy rozmiarze macierzy zbiegającym do nieskończoności) empirycznej miary spektralnej macierzy losowej o niezależnych scentrowanych wyrazach o tej samej wariancji jest pewien deterministyczny rozkład niezależny od macierzy. Twierdzenia tego typu nie dają żadnej informacji o zachowaniu największej wartości własnej badanej macierzy. Są jednak inne wyniki, które szacują średnią największej wartości własnej, jak wynik Seginera z [17], który mówi, że dla macierzy losowej X o symetrycznych wyrazach i.i.d. wielkość $\mathbb{E}\|X\|_{2,2}$[1] jest porównywalna ze średnią maksimum z długości euklidesowej wierszy i kolumn macierzy X. To samo zachodzi dla macierzy gaussowskich o ogólnej strukturze wariancji wyrazów (tj. dla macierzy postaci $X_{ij} = a_{ij} g_{ij}$, gdzie g_{ij} to niezależne zmienne losowe o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$), co zostało wykazane ostatnio w [13], a także – z dokładnością do stałych logarytmicznych z wymiaru – dla dowolnej macierzy losowej X o niezależnych scentrowanych wyrazach, patrz [16]. Zaletą tych dwóch ostatnich wyników jest to, że nie trzeba w nich zakładać równych rozkładów (ani nawet wariancji) wyrazów X.

Kolejne znane oszacowanie górne $\mathbb{E}\|X\|_{2,2}$ również nie potrzebuje założenia równych rozkładów wyrazów macierzy, a jedynie ich niezależności: wiadomo z [7], że wtedy

$$\mathbb{E}\|X\|_{2,2} \lesssim \max_i \sqrt{\sum_j \mathbb{E}X_{ij}^2} + \max_j \sqrt{\sum_i \mathbb{E}X_{ij}^2} + \sqrt[4]{\sum_{i,j} \mathbb{E}X_{ij}^4}.$$

Chociaż to oszacowanie nie zależy od wymiaru macierzy, w pewnych przypadkach jest istotnie gorsze od tego, które wynika z [16].

Praca [2] zawiera oszacowania średnich innych norm operatorowych dla macierzy o niezależnych scentrowanych współrzędnych ograniczonych co do modułu przez 1: dla $q \geq 2$ i macierzy $m \times n$ autorzy wykazali, że $\mathbb{E}\|X\|_{2,q} \lesssim \max\{m^{1/q}, \sqrt{n}\}$. Z kolei w [6] Guédon, Hinrichs, Litvak i Prochno udowodnili, że dla macierzy gaussowskich $X = (a_{ij} X_{ij})_{i \leq m, j \leq n}$ o ogólnej strukturze wariancji i dla $p, q \geq 2$ zachodzi

$$\mathbb{E}\|X\|_{p',q} \leq C(p,q)\Bigg[\big(\log m\big)^{1/q} \max_{1 \leq i \leq m} \Big(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^p\Big)^{1/p} + \max_{1 \leq j \leq n} \Big(\sum_{i=1}^m |a_{ij}|^q\Big)^{1/q} + \big(\log m\big)^{1/q} \mathbb{E} \max_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} |X_{ij}|\Bigg].$$

[1] $\|\cdot\|_{p,q}$ oznacza normę operatorową z ℓ_p do ℓ_q.

Nie trudo przekonać się, że to oszacowanie jest optymalne z dokładnością do czynników logarytmicznych. Zauważmy, że przy szacowaniu $\mathbb{E}\|X\|_{p',q}$ w przypadku $(p,q) \neq (2,2)$ metody momentowe nie działają (gdyż dają one oszacowania tylko dla wielkości związanych ze spektrum X).

Wszystkie wspomniane do tej pory wyniki wymagają niezależności wyrazów macierzy. W rozprawie doktorskiej uogólniam główny wynik z [6] na szeroką podklasę macierzy losowych o log-wklęsłych izotropowych wierszach, używając schematu dowodu oryginalnego twierdzenia z [6]. Otrzymane oszacowanie jest optymalne (dla ustalonych $p, q \geq 2$) z dokładnością do czynników logarytmicznych z wymiaru. Podkreślmy, że nie musimy zakładać, by wiersze macierzy miały niezależne współrzędne – wystarczy by były one izotropowe (i log-wklęsłe). W dowodzie korzystamy z wyników otrzymanych w innych częściach rozprawy.

Aby uprościć notację, dla danej macierzy $A = (A_{ij})_{i\leq m, j\leq n}$ wymiaru $m \times n$ przez $A_i \in \mathbb{R}^n$ oznaczamy jej i-ty wiersz, zaś przez $A^{(j)} \in \mathbb{R}^m$ – jej j-tą kolumnę.

Twierdzenie 3.1. *Niech $m \geq 2$ i niech $Y_1, \ldots, Y_m$ będą niezależnymi izotropowymi wektorami log-wklęsłymi w $\mathbb{R}^n$ o tym samym rozkładzie. Niech dalej $A = (A_{ij})$ będzie (deterministyczną) macierzą $m\times n$. Rozważmy macierz losową X o wyrazach $X_{ij} = A_{ij}Y_{ij}$ dla $i \leq m, j \leq n$, gdzie Y_{ij} jest j-tą współrzędną wektora Y_i. Wówczas dla $p, q \geq 2$ zachodzi*

(3.1)

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\|X\|_{p',q}\\ &\quad\leq C(p,q)\Big[\big(\log m\big)^{1/q} \max_{1\leq i\leq m}\big\|A_i\big\|_p + \max_{1\leq j\leq n}\big\|A^{(j)}\big\|_q + \big(\log m\big)^{1/q+1}\mathbb{E}\max_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}|X_{ij}|\Big],\end{aligned}$$

gdzie stała $C(p,q)$ zależy tylko od p i q.

Kolejny wniosek to wersja Twierdzenia 3.1 wyrażona w taki sposób, jak wspomniane wcześniej wyniki z prac [17, 13, 16].

Wniosek 3.2. *Przy tych samych założeniach co w Twierdzeniu 3.1 zachodzi oszacowanie*

$$\mathbb{E}\|X\|_{p',q} \leq C(p,q)(\log m)^{1+1/q}\left(\mathbb{E}\max_{1\leq i\leq m}\Big(\sum_{j=1}^n |X_{ij}|^p\Big)^{1/p} + \mathbb{E}\max_{1\leq j\leq n}\Big(\sum_{i=1}^m |X_{ij}|^q\Big)^{1/q}\right)$$

Głównego twierdzenia można użyć również do wykazania jego analogu dla macierzy losowych, których wiersze są mieszankami gaussowskimi.

Wniosek 3.3. *Niech $m, n \geq 2$ i niech $G = (G_{ij})_{i\leq m, j\leq n}$ będzie macierzą, której wyrazy to niezależne zmienne losowe o standardowym rozkładzie normalnym. Niech dalej $X_{ij} = R_{ij}B_{ij}G_{ij}$, gdzie R jest log-wklęsłą i izotropową*[2] *macierzą losową niezależną od G. Wtedy dla każdego $p, q \geq 2$ zachodzi*

$$\mathbb{E}\|X\|_{p',q} \leq C(p,q)\left(\big(\log m\big)^{1/q+1}\Big[\max_{1\leq i\leq m}\big\|B_i\big\|_p + \mathbb{E}\max_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}|X_{ij}|\Big] + \log n \max_{1\leq j\leq n}\big\|B^{(j)}\big\|_q\right).$$

[2]To znaczy R traktowane jako wektor w $\mathbb{R}^{mn}$ jest log-wklęsłe i izotropowe.

Literatura

1. R. Adamczak, R. Latała, A. E. Litvak, K. Oleszkiewicz, A. Pajor, and N. Tomczak-Jaegermann, *A short proof of Paouris' inequality*, Canad. Math. Bull. **57** (2014), no. 1, 3–8. MR 3150710
2. G. Bennett, V. Goodman, and C. M. Newman, *Norms of random matrices*, Pacific J. Math. **59** (1975), no. 2, 359–365. MR 0393085
3. N. Feldheim, A. Marsiglietti, P. Nayar, and J. Wang, *A note on the convex infimum convolution inequality*, Bernoulli **24** (2018), no. 1, 257–270. MR 3706756
4. N. Gozlan, C. Roberto, P.-M. Samson, Yan S., and P. Tetali, *Characterization of a class of weak transport-entropy inequalities on the line*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **54** (2018), no. 3, 1667–1693. MR 3825894
5. N. Gozlan, C. Roberto, P.-M. Samson, and P. Tetali, *Kantorovich duality for general transport costs and applications*, J. Funct. Anal. **273** (2017), no. 11, 3327–3405. MR 3706606
6. O. Guédon, A. Hinrichs, A.E. Litvak, and J. Prochno, *On the expectation of operator norms of random matrices*, Geometric aspects of functional analysis, Lecture Notes in Math., vol. 2169, Springer, Cham, 2017, pp. 151–162. MR 3645120
7. R. Latała, *Some estimates of norms of random matrices*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), no. 5, 1273–1282. MR 2111932
8. ______, *Weak and strong moments of random vectors*, Marcinkiewicz centenary volume, Banach Center Publ., vol. 95, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2011, pp. 115–121. MR 2918093
9. ______, *Modified Paouris inequality*, Geometric aspects of functional analysis, Lecture Notes in Math., vol. 2116, Springer, Cham, 2014, pp. 293–307. MR 3364693
10. R. Latała and M. Strzelecka, *Weak and strong moments of ℓ_r-norms of log-concave vectors*, Proc. Amer. Math. Soc. **144** (2016), no. 8, 3597–3608. MR 3503729
11. ______, *Comparison of weak and strong moments for vectors with independent coordinates*, Mathematika **64** (2018), no. 1, 211–229. MR 3778221
12. R. Latała and T. Tkocz, *A note on suprema of canonical processes based on random variables with regular moments*, Electron. J. Probab. **20** (2015), no. 36, 17. MR 3335827
13. R. Latała, R. van Handel, and P. Youssef, *The dimension-free structure of nonhomogeneous random matrices*, Invent. Math. **214** (2018), no. 3, 1031–1080. MR 3878726
14. R. Latała and J.O. Wojtaszczyk, *On the infimum convolution inequality*, Studia Math. **189** (2008), no. 2, 147–187. MR 2449135
15. G. Paouris, *Concentration of mass on convex bodies*, Geom. Funct. Anal. **16** (2006), no. 5, 1021–1049. MR 2276533
16. S. Riemer and C. Schütt, *On the expectation of the norm of random matrices with non-identically distributed entries*, Electron. J. Probab. **18** (2013), no. 29, 13. MR 3035757
17. Y. Seginer, *The expected norm of random matrices*, Combin. Probab. Comput. **9** (2000), no. 2, 149–166. MR 1762786
18. M. Strzelecka, *Estimates for norms of log-concave matrices*, work in progress (2019+).
19. M. Strzelecka, M. Strzelecki, and T. Tkocz, *On the convex infimum convolution inequality with optimal cost function*, ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. **14** (2017), no. 2, 903–915. MR 3731797